1　経済学に必要な最適化理論

1.1　等式制約下の最適化問題

経済学ではしばしば, 予算制約のもとでの効用最大化など, ある制約式のもとでの目的関数の最大化が行われる。典型的な 2 変数の最適化問題は, 次のような形をしている。

[1] 典型的な問題

$$\underset{x_1,x_2}{max} f(x_1, x_2)$$
$$s.t.\ \ g(x_1, x_2) = m$$

ただし, 関数 f,g はともに C^1 級の関数である。

これは, 制約式 $g(x_1, x_2) = m$ のもとで, 目的関数 $f(x_1, x_2)$ を x_1, x_2 について最大化せよ, という内容である。

仮に制約式が $x_2 = \phi(x_1)$ などの陽の形で表すことが出来るならば, それを目的関数に代入し直すことで制約式の無い 1 変数の最大化問題にすることが可能である。しかし残念ながら, それは常に可能なことではない。したがって別のやり口を模索する必要があるが, それについては次の陰関数定理が重要な役割を果たすことになる。

1.1.1　陰関数定理

Theorem 1.1 (Implicite Function Theorem).
[1] の最適解を (a,b) とする。もし, 関数 $g(x_1, x_2) = m$ が (a, b) において,

$$g_{x_1}(a, b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_{x_2}(a, b) \neq 0$$

を満たしているならば[1], (a,b) の近傍において関数 g の *well-defined* な陰関数 $x_2 = \phi(x_1)$（または $x_1 = \varphi(x_2)$）が存在する。

また, この関数 ϕは (a, b) にて微分可能であり, その導関数は次で与えられる連続関数となる。

$$\phi'(a) = -\frac{g_{x_1}(a, b)}{g_{x_2}(a, b)}$$

Proof. 証明には多くの数学的補助を要するため省略する。 □

陰関数定理により, 上記の関数が局所的に存在すること, そしてそれが微分可能であることが示された。これを用いて, 次の重要な定理を証明する。

[1]関数の下付き記号は, それによる微分を表す。なお, このような条件を満たしている (a,b) を正則点という。

1.1.2 ラグランジュ乗数法

Theorem 1.2 (Lagrange).
[1] の最適解を (a,b) とする。このとき関数 f,g について, 以下の 3 つのラグランジュ条件,

$$
\begin{aligned}
&[i] \quad f_{x_1}(a,b) - \lambda g_{x_1}(a,b) = 0 \\
&[ii] \quad f_{x_2}(a,b) - \lambda g_{x_2}(a,b) = 0 \\
&[iii] \quad g(a,b) = m
\end{aligned}
$$

を満たす一意のラグランジュ乗数 λ^*が存在する。つまり最適解 (a,b) は, ある実数λについて, 次で定義されるラグランジュ関数

$$L \equiv f(x_1, x_2) - \lambda \left(g(x_1, x_2) - m \right)$$

を最大にする解である。

Proof. □

この定理の逆は一般には成り立たない。つまり, ラグランジュ関数の最大解を求めたからと言って, 元の問題の最適解を求めたことにはならない。しかし, 目的関数が擬凹 (*pseudo-concave*) かつ制約式が準凹 (*quasi-concave*) ならば, ラグランジュ関数を最大にする $(x_1^*, x_2{}^*)$ は, もとの問題の大域的な最適解になることが知られている。したがって, 目的関数が凹関数で, 制約式が線形で与えられているような典型的な問題では, 細かいことを気にせずにラグランジュ関数を用いた制約式のない最大化問題を解くだけでよい。

- 直感的説明

なぜラグランジュ関数の定義が適切なのか, ラグランジュ条件の意味は一体何なのか, それらについて直感的な説明をしよう。

まずこの問題において, 一度制約式を無視して, 自由に x_1, x_2が選べるとする。ただし, 制約式の左辺 gが右辺 m の値を 1 単位上回るごとにλ だけの罰を受ける, というルールを定める。ただし逆に下回れば, λ だけの利得を受けることとする。このとき, そのような主体の目的関数は, 次のラグランジュ関数になる。

$$L \equiv f(x_1, x_2) - \lambda \left(g(x_1, x_2) - m \right)$$

仮に x_1, x_2を自由に選んだ結果 g の値が m をオーバーしたとすると, 制約を守ったときより f の値を上げることが出来るものの, 一方でペナルティを払わなければならないことになる。

もしもペナルティλ が小さい値ならば, この主体は制約式を少々破ったとしてもそれほどの痛手ではないので, ルールを破る（$g(x_1, x_2) > m$）ことが最適になるだろう。また逆に, λ が大きい値ならば, 今度は制約式を過剰に守る（$g(x_1, x_2) < m$）ことで L の値を上げることができる。

よって, λ がある適切な値 λ^* に定まれば, この主体は制約式をちょうど守る（$g(x_1, x_2) = m$）ことが最適になるはずである。そのような適切な λ とは, 制約式を破るメリットとデメリット（もし

くは制約式を守るデメリットとメリット）が釣り合うような λ のことであり，上のラグランジュ条件 $[i]$ と $[ii]$ はそのことを述べたものなのである。

より厳密には，定理 1.2 の 3 式を満たす $({x_1}^*, {x_2}^*, \lambda^*)$ は，ラグランジュ関数の最大解というより鞍点である。事実，$({x_1}^*, {x_2}^*)$ は上記の通り $L(x_1, x_2, \lambda^*)$ を最大にするが，λ^* は一般には $L({x_1}^*, {x_2}^*, \lambda)$ を最大にはしない。

[2] まとめ

特定の条件下で，等式制約下の最適化問題は，ラグランジュ関数の鞍点問題に変換できる。

1.2　不等式制約下の最適化問題

経済学ではしばしば, 予算制約のもとでの効用最大化など, ある制約式のもとでの目的関数の最大化が行われる。典型的な 2 変数の最適化問題は, 次のような形をしている。

[3] 典型的な問題

$$\underset{x_1,x_2}{max} f(x_1,x_2)$$

$$s.t.\ \ g^i(x_1,x_2) \le m \qquad i\text{=}1,\dots,n$$

ただし, 関数 f,g はともに C^1 級の関数である。

これは, n 本の制約式 $g^i(x_1,x_2) \le m$ のもとで, 目的関数 $f(x_1,x_2)$ を x_1,x_2 について最大化せよ, という内容である。

[3] の問題の最適解において, n 本の全ての制約式が *binding*[2]であるとは限らない。*binding* している制約式もあれば, そうでない制約式も当然あるだろう。

しかし最適解において制約式が *binding* していないということは, 解はその制約について内点解になっているということである。したがって, たとえその制約が最初から存在していなかったとしても, その問題の最適解は変わらない。例えば通常の効用最大化問題において予算制約に加え消費 x について非負制約を課したとしても, それが最適解で満たされるのは至極当然のことであるから, そんな制約はあっても無くても同じである。

つまり, 最適解において *binding* となる制約式がどれか分かれば, 上の [3] は, *binding* していない他の制約式を無視した等式制約下の最適化問題に変換可能であり, それは既に知っているラグランジュ乗数法で解くことができる。そこで問題となるのは, どうやって制約式を選別するかということであるが, それは以下で述べるクーン・タッカーの定理の中で述べてられている。

1.2.1　クーン・タッカーの定理

Theorem 1.3 (Kuhn-Tucker Theorem).
[3] の最適解を (a,b) とし, 関数 f,g^i について次のラグランジュ関数を定義する。

$$L(x_1,x_2) \equiv f(x_1,x_2) - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(g^i(x_1,x_2) - m\right)$$

このとき, 最適解 (a,b) とラグランジュ関数について以下の条件,

[2]ある点 x にて, 不等式制約が等式で成り立っているとき, 不等式制約は x にて *binding*（または active）であるという。

$$
\begin{aligned}
&[i] \quad \frac{\partial L(a,b)}{\partial x_1} = 0 \\
&[ii] \quad \frac{\partial L(a,b)}{\partial x_2} = 0 \\
&[iii] \quad g^i(a,b) \leq m \qquad (\lambda^i > 0 \text{ のときは } g^i(a,b) = m) \\
&[iv] \quad \lambda^i \geq 0 \qquad (g^i(a,b) < m \text{ のときは} \lambda^i = 0)
\end{aligned}
$$

を満たす非負のラグランジュ乗数のヴェクター $\lambda^* = (\lambda^1, ..., \lambda^n)$ が存在する。

Proof. □

1.2.2 相補スラック条件の解釈

上の定理の [i], [ii] はラグランジュ条件のものと同じで, [iii] と [iv] は相補スラック条件（*Complementarily Slackness Condition*）と呼ばれるものである。ところで, [iii] と [iv] は, 次のようにまとめられる。

$$
\lambda^i \geq 0, g^i(a,b) - m \leq 0 \quad \text{ただし}, \lambda^i \left(g^i(x_1,x_2) - m\right) = 0 \qquad \forall i = 1, ...n
$$

これは, binding している制約式に関しては正の λを, *binding* していない制約式には 0 のλを割り当てる, ということを述べている。それによって, 最適解において *binding* していない制約式のみをラグランジュ関数の中から巧みに取り除くことができる。

- 直感的解釈

ここでも, 先ほどのペナルティの理屈が直感的理解を助けてくれる。そもそも何故ペナルティを課したかというと, そうしないと経済主体は最適解において制約を守らないからであった。先ほどは, 制約なしの状況において自由勝手に変数を選ばせると, 必ず制約式を破るような主体を前提として考えていた。

しかし一方, 最初から存在しなくても最適解において必ず strictly に守られる（$g(a,b) < m$）ような制約についてはどうだろうか。そんな制約式について, わざわざペナルティを課す必要はあるだろうか？答えは否である。

ペナルティの重さは, それと対応する制約式の重さと直結していると考えて良い。殺人に対し厳罰が処せられるのは, 殺人罪が社会に悪影響を与える重罪だからである。逆に, あっても無くても人々が遵守するような法律には, それを破ったときの処罰など設定する必要はない。つまり, その制約が無くとも最適解で必ず strictly に守られるならば, そんな制約はペナルティを課す価値など無いのだ。

- 経済学的解釈

ここまでラグランジュ乗数λをペナルティと見なしてきた。しかし経済学的には, λは資源のシャドープライス（利用可能な資源が限界的に 1 単位増加したときに, 目的関数の値がどれほど上昇するか, という値）であることが知られている。それを確認するために, 次の効用最大化問題を考えよう。

[4] 典型的な効用最大化問題

$$\max_{x} U = u(x)$$
$$s.t.\ \ p \cdot x = w$$

ここで, p,x はそれぞれ価格ベクトル, 財ベクトルであり, w は所得である。

この問題をラグランジュ乗数法を用いて解くと, 財についての需要関数 $x(p,w)$ が得られ, それを効用関数に代入することで間接効用関数 $v = u[x(p,w)]$ が得られる。以下からは, ラグランジュ乗数が所得の限界効用となっていることを示す。

この *Value function* とも言うべき間接効用関数を所得 w で微分すると, チェーン・ルールより,

$$\nabla u[x(p,w)] \cdot D_w x(p,x)$$

となる。ここで, ラグランジュ条件から $\nabla u[x(p,w)] = \lambda p$（p は価格ベクトル）であり, またワルラス法則から $p \cdot D_w x(p,x) = 1$ であるから,$\nabla u[x(p,w)] \cdot D_w x(p,x) = \lambda$ を得る。

λが資源のシャドープライスであることが分かったところで, 相補スラック条件の解釈に移ろう。

[5] 相補スラック条件

[iii] $g^i(a,b) \leq m$ （$\lambda^i > 0$ のときは $g^i(a,b) = m$）
[iv] $\lambda^i \geq 0$ （$g^i(a,b) < m$ のときは $\lambda^i = 0$）

- シャドープライス λが正であるとき（$\lambda^i > 0$）

このとき, 仮に資源が 1 単位だけ天から降ってきたとすると, 主体は間違いなくそれを消費する。なぜなら, 資源の限界効用が正であるから, 資源を消費することで目的関数の値を上げることができるからである。すなわち, 主体は少なくとも現在手元に存在する資源を余すことなく使っていることになる。つまり, 制約式が binding している（$g^i(a,b) = m$）ことになる。

- 最適解において制約式が binding でないとき（$g^i(a,b) - m < 0$）

このとき, 主体は最適解において資源を余らせていることになる。仮に, もう 1 単位余計に資源が増えたとしても, 目的関数の値は増えない。つまり, 資源のシャドープライスはゼロであるということになる。$\Rightarrow \lambda^i = 0$