1 Cobb-Douglas Production Function

Definition 1.1 (Cobb-Douglas Production Function).
コブ=ダグラス型生産関数[1]とは, 以下の式で表される生産関数のことである。

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

ただし, Y は生産量, K は資本投入量, L は労働投入量を表す。また, α, β は正の定数とする。

1.1 Homogeneous Function of degree k

Definition 1.2 (Homogeneous Function of degree k).
正の整数 k について, 次の関係が成立する関数を, **k 次の同次関数**という。

$$\lambda^{k}y = f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

これは, 生産要素 $x_1, x_2, ..., x_n$ を, それぞれ λ 倍したときの生産量が, もとの生産量の λ^k 倍になっていることを意味している。

コブ=ダグラス型関数について, 以下の命題が成り立つ。

Proposition 1.3.
(1.1) において, $\alpha + \beta = k$ の関係が成り立つとき *(k は正の整数)*, この生産関数は k 次同次関数である。

Proof.
(1.1) の各生産要素を λ 倍すると,

$$\begin{aligned} Y(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} \cdot AK^{\alpha}L^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta}Y \end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha + \beta = k$ とおくと, $Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda^k Y$ が成り立つ。したがって, 定義 1.2 より (1.1) は k 次同次関数となる。 □

コブ=ダグラス型関数は, 一般に 1 次同次関数として使われることが多い。そのもとでは命題 1.1 より $\alpha + \beta = 1$ が成り立つことから, このとき (1.1) は,

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad s.t. \alpha + \beta = 1$$

または,

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

と書き換えられる。このような 1 次同次の生産関数をもつ企業の生産技術は「規模に対して収穫不変」とも表現される。

[1] この関数は非常に便利な形をしているので, 生産関数のみならず, 効用関数やマッチング関数などにも用いられる。

1.2 Output Elasticity of an Input

1 次同次関数であるコブ=ダグラス型生産関数の α, βは, 一体どのような意味をもつのだろうか。ところで k 次の同次関数については, 次の有名な定理が成立している。

Theorem 1.4 (Euler's Theorem for Homogeneous Function).
k 次の同次関数については, 次の関係が成立している。（下付き数字は, それによる微分を表す）

$$kf(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{x_1} + f_{x_2} ... + f_{x_n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.4)$$

この関係は, **同次関数に関するオイラーの定理**と呼ばれる。（一般的な証明は省略する）

Exercise 1.5 (Proof of simple case of Theorem 1.1).
定理 1.4 が, (1.3) 式について成立していること, つまり

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.5)$$

が成り立つことを示しなさい。
（ヒント：*1* 次同次の条件と, λが任意の数であることを利用する）

Definition 1.6 (Output Elasticity of an Input).
ある生産要素を 1%変化させたときに生産量が何%変化するか, その値を表したものを, **産出の生産要素に対する弾力性**という。

特に, 資本を 1%変化させたとき, 生産量が何%変化するかを表したものを**産出の資本弾力性**といい, 具体的には,

$$\rho_K = \frac{dY/Y}{dK/K}$$

と定義される。

また同様に, 労働を 1%変化させたとき, 生産量が何%変化するかを表したものを, **産出の労働弾力性**と呼び, 数式では,

$$\rho_L = \frac{dY/Y}{dL/L}$$

で表される。

Proposition 1.7.
(1.3) における α, βは, それぞれ産出の資本弾力性, 産出の労働弾力性を表している。（つまり, 1 次同次関数のコブ = ダグラス型生産関数におけるこれらの弾力性の和は 1 に等しい）

Proof.
(1.3) について,

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K = \alpha A K^{\alpha} L^{\beta} = \alpha Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L = \beta A K^{\alpha} L^{\beta} = \beta Y$$

を得る。これらを変形すると,

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

が成り立つ。さらにこれらを変形することで,

$$\alpha = \frac{dY/Y}{dK/K} = \rho_K, \quad \beta = \frac{dY/Y}{dL/L} = \rho_L$$

を得る。 □

1.3 Capital and labor shares

我々はしばしば, 生産によって得た価値がどれだけ資本と労働に振り分けられたのか, その相対的な値に興味を抱く。そのような概念として, 資本分配率および労働分配率というものがある。

Definition 1.8 (Capital and labor shares).
生産による付加価値のうち, どれだけが資本への支払いとして分配されたか, その値を資本分配率という（労働分配率についても同様）。具体的には, 資本分配率, 労働分配率は, それぞれ以下の式で表される。

$$\varsigma_K = \frac{rK}{Y}, \quad \varsigma_L = \frac{wL}{Y}$$

ただし, r は資本のレンタル価格, w は労働賃金である。

Proposition 1.9.
生産要素市場が完全競争的であると仮定する。このとき, (1.3) における α, βは, それぞれ資本分配率, 労働分配率を表す。すなわち, 1 次同次関数のコブ = ダグラス型生産関数において, 生産された付加価値は全て資本と労働に分配し尽くされる。

Proof.
命題 1.7 において, (1.3) について

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

が成り立つことを確認した。
要素市場が競争的であるという仮定から, $\frac{\partial Y}{\partial K} = r, \frac{\partial Y}{\partial L} = w$ である。これらを上記に代入することで, $\alpha = \frac{rK}{Y}, \beta = \frac{wL}{Y}$ を得る。 □

1.4 Marginal Rate of Technical Substitution

Definition 1.10 (Marginal Rate of Technical Substitution).
「労働（資本）を追加的に *1* 単位増やしたとき, もとの生産量を維持するには, どれだけ資本（労働）を減らす必要があるか」を表す割合のことを, 技術的限界代替率という。

具体的には, 等量曲線の接線の傾きの絶対値であり, 数学的には以下の式で表現される。

$$MRTS = -\frac{dK}{dL}\,|_{F(K,L)=\bar{x}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1.6)}$$

Proposition 1.11.
コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) における技術的限界代替率は,

$$MRTS = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{K}{L}$$

で表される。特に, 生産関数が *1* 次同次のときは, $\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{K}{L}$ である。

Proof.
ある生産関数 $Y = F(K,L)$ を全微分することで, $dY = \frac{\partial Y}{\partial K}dK + \frac{\partial Y}{\partial L}dL$ を得る。いま, 生産量が変化しない状況を考えているので $dY = 0$, つまり, $\frac{\partial Y}{\partial K}dK + \frac{\partial Y}{\partial L}dL = 0$ となる。これを変形することで, 以下を得る。

$$\begin{aligned} MRTS &= -\frac{dK}{dL} \\ &= \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1.7)} \end{aligned}$$

よって生産関数から技術的限界代替率を求めることが可能となった。(1.1) より,

$$\begin{aligned} MRTS &= \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} \\ &= \frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{K}{L} \end{aligned}$$

を得る。

□

1.5 Elasticity of substitution between labour and capital

コブ=ダグラス型関数の特徴の 1 つとして, **要素間の代替弾力性が 1 となる**ということが挙げられる。代替弾力性は, 次のように定義される。

Definition 1.12 (**Elasticity of substitution**).
生産要素の相対価格 $\frac{w}{r}$ が *1%*変化したとき, 要素投入量の比率 $\frac{K}{L}$ が何 *%*変化するか, という指標を**資本と労働の代替弾力性**という。具体的には, 以下の式で表される。

$$\sigma = \frac{d(K/L)/K/L}{d(w/r)/w/r} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.8)$$

Proposition 1.13.
コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) の要素間の代替弾力性は *1* である。

Proof.
$y = logf(x)$ の微分について, $dy' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ が成り立つことを利用すると, $dlog\frac{K}{L} = \frac{d(K/L)}{K/L}$, および, $dlog\frac{w}{r} = \frac{d(w/r)}{w/r}$ を得る。
これを (1.8) に代入すると,

$$\sigma = \frac{dlog\frac{K}{L}}{dlog\frac{w}{r}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.9)$$

ここで, 企業が費用最小化行動をとるとすると, $MRTS = \frac{w}{r}$ が成り立つ。これを (1.9) に代入することで, 次式を得る。

$$\sigma = \frac{dlog\frac{K}{L}}{dlogMRTS} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.10)$$

コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) の技術的限界代替率は, $MRTS = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{K}{L}$ で表される。これの対数をとって,

$$\begin{aligned} logMRTS &= -log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{K}{L} \\ &= -log\frac{\beta}{\alpha} + log\frac{K}{L} \end{aligned}$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ は定数だから, $dlogMRTS = dlog\frac{K}{L}$ となる。これを (1.10) に代入することで, $\sigma = 1$ を得る。
□